**Méthodes Quantitatives Elémentaires pour les Sciences Sociales  
(Licences de l’UPPA, Unité d’Enseignement Libre)**

**Introduction**

Ce n’est bien sûr qu’un exemple, mais le travailleur social qui doit aider une personne en difficulté pour remplir un dossier de demande d’aide doit être capable d’effectuer sans risque de se tromper un certain nombre de calculs élémentaires. Il doit être capable de vérifier que les résultats fournis par sa calculatrice ne sont pas aberrants. Les personnes en charge de l’examen de tels dossiers de demandes d’aide doivent être en mesure, elles aussi, de vérifier rapidement et avec efficacité que les calculs sont pertinents et sont justes. Cela requiert des compétences de base que ce cours vise à vous apporter.

Dans leur activité de tous les jours, ces personnes doivent utiliser des barèmes et prendre connaissance d’informations chiffrées, exprimées par exemple sous forme d’indices, puis doivent les manipuler. Cela également requiert des compétences de base que ce cours vise à vous apporter.

Le cours de Méthodes Quantitatives Elémentaires pour les Sciences Sociales n’est donc pas un cours de mathématiques ou de statistiques au sens habituel du terme, qui rebuterait, nous le savons, une partie des étudiants inscrits dans l’une des licences en sciences sociales de l’UPPA. C’est un cours original qui part d’un parti pris totalement assumé : faisons comme si les étudiants qui suivent ce cours ne savaient **rien** en mathématique et en statistique. Débrouillons nous pour leur apporter ces compétences de base, dont ils auront absolument besoin dans leur future activité professionnelle, quelle qu’elle soit, à l’issue de leur licence.

La conséquence d’un tel parti pris est que nous n’hésiterons pas à partir de zéro, comme on dit. Nous n’hésiterons pas à décomposer les calculs et les raisonnements, pour qu’ils puissent être compris de tous. C’est ce que nous faisons, avec bonheur, nous voulons dire avec succès, avec nos étudiants de première année de licence AES, de licence de Droit et de licence Economie-Gestion (semestre 1 commun à ces trois licences) à l’Université de Pau et des Pays de l’Adour.

La clé du succès, dans de tels apprentissages, est d’une part de prendre le temps de bien comprendre chaque point de ce cours, chaque type de calcul, puis de refaire les exemples et les exercices sans avoir le corrigé sous les yeux. Si l’on ne s’impose pas cette discipline minimale, alors on en parvient à aucun résultat.

Faire ou refaire un exercice suppose en outre de travailler avec un papier et un crayon (ou un stylo, peu importe bien sûr). Certains étudiants s’efforcent d’enchainer les étapes d’un calcul sur une calculatrice ou un ordinateur, et souvent n’y parviennent pas, et cela pour deux raisons :

* il est bien plus facile de trouver l’enchainement des étapes d’un calcul si on les écrit sur une feuille de papier ; ne pas écrire les étapes du calcul, c’est prendre le risque d’une infâme confusion dans notre tête ;
* il est facile d’identifier une erreur sur des calculs écrits sur le papier, alors qu’il est presqu’impossible de l’identifier et de la corriger si on l’a faite sans l’écrire.

Attention, une calculatrice vous sort toujours un résultat. Il est rarement juste, car une erreur de frappe ou d’enchainement d’opérations élémentaires est extrêmement fréquente. Il faut donc d’une part décomposer les étapes du calcul sur le papier, nous l’avons dit, et d’autre part être capable d’estimer par calcul mental l’ordre de grandeur de la réponse attendue, de façon à contrôler le résultat que donne la calculatrice. Cela suppose de réapprendre ses tables de multiplication, en particulier.

Nous prendrons beaucoup d’exemples dans ce cours, et vous proposerons beaucoup d’exercices à faire et à refaire inlassablement. Les lire et les relire ne servirait pas à grand chose. Ce n’est pas en lisant et en relisant la recette que le jeune boulanger peut apprendre à faire du bon pain. Il doit étudier la recette, la comprendre, l’apprendre par cœur, puis l’exécuter maintes fois pour parvenir à faire du bon pain. Comme lui, pratiquons, refaisons les exercices sans avoir le corrigé sous les yeux, et très vite nous maîtriserons tous ces calculs indispensables à notre future activité professionnelle.

Cet enseignement de Méthodes Quantitatives Elémentaires pour les Sciences Sociales est structuré en deux chapitres :

* **Chapitre I. Calculs élémentaires**

Section 1 : Calcul sur les fractions

Section 2 : Equations du premier degré

Section 3 : Taux de croissance et autres valeurs relatives

Section 4 : Equation d’une droite et ses applications

Section 5 : Elasticité de la demande

Section 6 : Evolution d’une variable, indices

* **Chapitre II. Introduction aux statistiques**

Section 1 : Les indicateurs de tendance centrale (moyenne simple, moyenne pondérée, médiane)

Section 2 : Les indicateurs de dispersion (étendue, variance, écart type)

**Chapitre 1 : Calculs élémentaires**

Commençons par un calcul simple.

Soit V = 10 + 2 \* 5

A quoi est égal V ?

Présenté ainsi, nous avons toutes les chances de nous tromper !

Pour ne pas se tromper, nous devons écrire dans quel ordre doivent se faire les calculs. Nous devons donc préciser l’enchaînement des calculs avec des parenthèses pour lever toute ambigüité :

* + Si nous écrivons V = (10 + 2) \* 5, cela fait 12\*5, soit 60
  + Si nous écrivons V = 10 + (2\*5), cela fait 10 + 10, soit 20

On doit d’abord faire les calculs proposés entre parenthèses.

Plaçons donc toujours des parenthèses dans les calculs que nous nous proposons de faire, pour lever l’ambiguïté dans l’enchainement des calculs à réaliser.

**Section 1 : Calcul sur les fractions**

1. **Définition et calculs élémentaires sur les fractions.**

**Une fraction est un rapport entre deux nombres, c’est-à-dire la division du premier, le numérateur, par le second, le dénominateur**.

Exemples : ½ est une fraction. ¼ en est une autre. 12/5 en est une troisième…

Identifions bien sur le graphique suivant (graphique 1):

* 1/2
* 1/4
* 1/8

**Graphique 1** : Quelques fractions élémentaires

Nous voyons bien sur ce graphique que 1/4, c’est la moitié de 1/2

ce qui s’écrit : (1/4) = (1/2)/2

Donc pour diviser 1/2 par deux, je multiplie le dénominateur par deux.

De la même façon, si A = a/b,

alors (A/6) = (a/b)/6 = (a/6\*b)

Donc **pour diviser une fraction A par six, je multiplie son dénominateur par six**.

On voit aussi sur le graphique 1 que 1/2, c’est 4 fois 1/8

ce qui s’écrit : (1/2) = 4\*(1/8)

ou encore : (1/2) = (4/8)

Si bien que **pour multiplier une fraction, ici 1/8, par 4, je multiplie le numérateur par 4**.

De la même façon, si A = a/b,

(5\*A) = 5\*(a/b) = (5\*a)/b

Donc **pour multiplier une fraction A par cinq, je multiplie le numérateur par cinq**.

Revenons au graphique 1. Nous voyons bien sur le graphique que :

(1/8) + (1/8) = (1/4)

Or (1/8) + (1/8) = 2\*(1/8)

Soit (1/8) + (1/8) = (2\*1)/8

Ou encore (1/8) + (1/8) = 2/8 ,

Donc 2/8 = 1/4.

Conclusion : **on ne change pas la valeur du rapport en divisant numérateur et dénominateur par la même valeur**.

Par ailleurs, nous voyons bien sur le graphique 1 que :

(1/8) + (1/8) + (1/4) = (1/2)

Cela est-il surprenant ? Non, car:

(1/8) + (1/8) + (1/4) = [2\*(1/8)] + (1/4)

(1/8) + (1/8) + (1/4) = (2/8) + (1/4)

(1/8) + (1/8) + (1/4) = (1/4) + (1/4)

(1/8) + (1/8) + (1/4) = (2/4)

(1/8) + (1/8) + (1/4) = (1/2)

**7/15 est il supérieur ou inférieur à 2/5 ?**

Pour répondre avec assurance, ramenons ces deux rapports au même dénominateur, soit 15 par exemple.

2/5 = (3\*2)/(3\*5), nous ne changeons pas la valeur du rapport en multipliant numérateur et dénominateur par une même valeur, ici 3.

Pourquoi 3 ? Pour avoir 15 au dénominateur…

2/5 = 6/15

7/15 étant supérieur à 6/15, j’en déduis que 7/15 est supérieur à 2/5

Pour éviter les erreurs, dans ce type de calcul, on écrirait :

soit A = 7/15, et soit B = 2/5 (on nomme les grandeurs),

réduisons A et B au même dénominateur, soit 15,

B= 2/5 soit B= 6/15

Donc A > B car 7 > 6.

**Application n°1 :**

Ayant réussi une belle affaire, une mère cadre d’entreprise reçoit une prime, qu’elle décide de répartir entre ses quatre enfants, en fonction de leurs besoins et désirs du moment...

Elle prévoit la moitié pour l’aîné, étudiant, et ¼ pour le cadet, au lycée.

Q1 : Combien reste-t-il pour les deux autres ?

Q2 : Si elle répartit pour moitié ce restant, combien cela fait-il pour chacun ?

Q3 : Calculez les montants reçus par chacun des 4 enfants si la prime est de 8000 €.

**Solution :** Soit P la prime, P1 ce que reçoit le premier, P2 ce que reçoit le second, P3 ce que reçoit le troisième, et P4 ce que reçoit le quatrième.

Le premier reçoit : P1 = P/2, ce qui s’écrit aussi P1= (1/2)\*P

Le second reçoit P2 = P/4, ce qui s’écrit aussi P2= (1/4)\*P

Appelons R ce qu’il reste pour les deux derniers,

R = P – (P/2) – (P/4)

R = (4P/4) – (2P/4) –(P/4)

Soit R = P/4

Si elle répartit pour moitié ce restant, cela fera pour chacun:

P3 = P4 = R/2

P3 = P4 = P/8

Si la prime P s’élève à 8000€, chacun recevra :

P1 = P/2

P1 = (8000 €)/2, soit P1 = 4000 €

P2 = P/4

P2 = (8000 €) /4, soit P2 = 2000 €

P3 = P4 = P/8,

soit P3 = P4 = (8000 €) / 8, soit 1000€.

**Application n°2 : 10/16 est-il supérieur ou inférieur à 3/4 ?**

Pour répondre, je ramène les deux rapports au même dénominateur, par exemple 16.

Posons A = 10/16, et B = 3/4. Nous voulons comparer A et B…

B = 3/4

Donc B = 12/16

J’en déduis que A < B !

**Application n°3 :**

Une entreprise a produit 900 unités au cours de la semaine 1, pour un coût global de 500 000 €. Elle a produit 600 unités la semaine 2 pour un coût total de 400 000 €. Sans prendre votre calculatrice, le coût de production est-il plus bas ou plus élevé en semaine 2 par rapport à la semaine 1 ?

Soit A le coût de production unitaire en semaine 1; A = 565 000 / 900

Soit B le coût de production unitaire en semaine 2; B = 400 000 / 600

Si nous ne prenons pas la calculatrice, le plus simple est de réduire les deux fractions au même dénominateur, par exemple 900.

Pourquoi 900 ? Parce que c’est facile ! En effet : B = 400 000/600, soit B = 200 000/ 300, ou encore B = 600 / 900

Nous voyons donc que A < B, le coût de production unitaire a augmenté !

1. **La règle de trois.**

Au supermarché, 6 bouteilles d’eau minérale coûtent 3€. Un client passe à la caisse avec 16 bouteilles d’eau. Combien doit-il ?

**Solution** : Il faut poser le raisonnement comme suit :

Soit x la valeur cherchée, **6 bouteilles d’eau valent 3 €, 1 bouteille vaut 6 fois moins, 16 bouteilles valent 16 fois plus**…

Et on écrit

x = (3€ /6) \* 16

Soit x = (1€/2)\*16

x = 8 €

**Application n°4:**

Une entreprise s’efforce de calculer son « bilan carbone » (quantité de CO2 qu’elle rejette chaque année). Concernant les voitures de ses vendeurs, sachant que pour faire 400 km, elles émettent environ 68 kg de CO2, combien ont émis les vendeurs en 2013, sachant qu’ils ont parcouru au total 800 000 km cette année là ?

**Solution** : Soit X la quantité de CO2 émise recherchée. Pour faire 400 km, on émet 68 kg de CO2, pour faire 1 km, 400 fois moins, pour faire 800.000 km, 800.000 fois plus,

Soit X = (68 kg / 400 km) \* 800 000 km

C'est-à-dire X = (68 kg / 4) \* 8000

X = (68 kg) \* 2000

X = 136 000 kg, soit X = 136 tonnes de CO2.

**Section 2: Equations du premier degré**

Si l’on vous dit 3x + 7 = 28, savez vous ce que vaut x ?

Autrement dit, savez-vous résoudre cette équation du premier degré ?

Oui, car si 3x + 7 = 28

alors 3x = 28 – 7 **(je retranche 7 de chaque côté du signe =)**

soit 3x = 21

soit encore x = (21/3) **(je divise par 3 des deux cotés)**

c’est-à-dire **x = 7**.

**Application n°5 :**

Pierre doit obtenir 10 de moyenne sur quatre matières pour réussir un examen.

Il a raté l’examen en première session, car il a obtenu les notes suivantes : Matière A : 12/20, Matière B : 14/20, Matière C : 10/20, Matière D : 2/20.

**Q1**: Quelle moyenne a-t-il obtenue ?

**Solution :**

Moyenne obtenue = (12 + 14 + 10 + 2)/4

Moyenne obtenue = 38 / 4 = 9,5

Il doit repasser en seconde session les matières pour lesquelles il n’a pas eu « la moyenne », 10/20, donc la matière D.

**Q2** : Quelle note doit-il obtenir à D en seconde session pour réussir l’examen ?

**Solution :**

Il lui faut obtenir une moyenne d’au moins 10 (sur 20).

Soit x la note minimale recherchée,

Il faut que : [(12 + 14 + 10 + x)/4] = 10

Soit [(36 + x)/4] = 10

Soit 36 + x = 40 (je multiplie des 2 côtés par 4)

Soit x = 40-36 (je retranche des 2 côtés 36)

Soit x = 4.

Il faut à Pierre une note d’au moins 4 (sur 20) pour réussir son examen.

**Application n°6 :**

Un magasin de jeans supporte chaque mois un montant de coûts fixes, c’est-à-dire de coûts dont le montant global ne dépend pas de la quantité vendue, de 15000 €

Exemples de coûts fixes : loyer du magasin, salaires des vendeurs salariés en CDI hors heures supplémentaires, perte de valeur des équipements (dotation aux amortissements), etc.

Par ailleurs, chaque jean étant vendu 70 € alors qu’il est acheté 40€, combien faut il en vendre pour ne pas perdre d’argent dans le mois ?

**Solution :**

Pour ne plus perdre d’argent, il faut que chiffre d’affaires, c’est-à-dire montant des ventes, soit égal à l’ensemble des coûts (coûts fixes plus coût d’achat des jeans vendus)

Soit q le nombre de jeans achetés et vendus, pour ne plus perdre d’argent, il faut que q soit tel que :

Ventes = Total des Coûts

70 € \* q = 15000€ + (40€ \* q)

(70 € \* q) – (40 € \* q) = 15000 €

(70 € - 40 €) \* q = 15000 €

30 € \* q = 15000 €

Soit q = (15000€/30€)

Soit q = 500 jeans

Ce magasin doit vendre au moins 500 jeans par mois pour ne pas perdre d’argent.

C’est ce que l’on appelle le « seuil de rentabilité » :

**Le seuil de rentabilité est, pour une période donnée, un mois par exemple, la quantité qu’il faut produire et vendre (ici vendre puisque c’est un magasin) pour cesser de perdre de l’argent.**

Nous pouvons représenter cela par les graphiques suivants (graphique 2 et graphique 3)…



**Graphique 2 :** Perte, lorsque l’entreprise est en dessous du seuil de rentabilité.



**Graphique 3 :** Bénéfice, lorsque l’entreprise est au-dessus du seuil de rentabilité.

**Section 3 : Taux de croissance et autres valeurs relatives**

Nous allons tout d’abord définir la notion de taux de croissance et montrer comment se présente son calcul (§1). Ensuite, nous montrons comment, connaissant la valeur d’une variable à une date donnée, nous pouvons, si nous connaissons le taux de croissance entre cette date et une date ultérieure, en déduire la valeur de la variable à cette date ultérieure (§2). Enfin, nous envisagerons d’autres types de valeurs relatives (§3).

1. **Taux de croissance, définition et calcul.**

Considérons une variable X, la taille du petit Pierre à sa date d’anniversaire par exemple.

* Soit X = X1 à la date 1, X = X2 à la date 2
* Par exemple X = 120 cm à la date 1, son anniversaire en 2014, et X = 126 cm à la date 2, son anniversaire en 2015.
* X1 est souvent appelée « valeur de départ », et X2 « valeur d’arrivée ».

On appelle **croissance de X** la quantité X2 – X1

Ici, la croissance de Pierre entre ces deux dates est de 6 cm. On la note souvent **ΔX**.

Donc dans cet exemple, ΔX = 6 cm

On appelle **taux de croissance de X entre les deux dates** le rapport de la croissance de X entre ces deux dates à sa valeur de départ.

* **Taux de croissance = ΔX / X**,

X étant par convention la valeur de départ, ici X1.

Le taux de croissance est donc la croissance de la variable rapportée à sa valeur de départ (on dit aussi « relative à » la valeur de départ).

Ici, si on note Tx ce taux de croissance, Tx = 6 cm / 120 cm

soit Tx = 0,05,

soit encore Tx = 5/100, ce qui s’écrit aussi Tx = 5%.

A ce sujet, remarquons bien que : 0,05 = 5/100 = 5%

* Ecrire 5/100 et 5%, c’est deux façons différentes d’écrire la même chose
* Ecrire 0,05, 5/100 et 5%, c’est trois façons différentes d’écrire la même chose…

Par ailleurs, si on divise un segment de 1 (par exemple 1m) en 10 sous-segments égaux, un sous-segment est de longueur l= 1/10.

* Par convention, cela s’écrit aussi l = 0,10
* 0,10 = 1/10 = 10/100 = 10%
* Ecrire 0,10, 1/10 et 10%, c’est donc là aussi trois façons différentes d’écrire la même chose…

De même, à quoi correspond 1/4 ?

* 1/4 = 25/100, en multipliant numérateur et dénominateur par 25, pour avoir 100 au dénominateur, donc :
* 1/4 = 25/100 = 25%

De même encore, à quoi correspond 1/5 ?

* 1/5 = 20/100, en multipliant numérateur et dénominateur par 25, pour avoir 100 au dénominateur, donc :
* 1/5 = 20/100 = 20%

1. **Utilisation du taux de croissance pour déterminer la valeur « d’arrivée »**

Comme nous l’avons vu, Taux de croissance = ΔX / X, **donc**  **ΔX = Taux de croissance \* X**,

C’est-à-dire que la croissance de la variable entre deux dates est égale au taux de croissance que multiplie la valeur à la date de départ.

Ainsi, connaissant la valeur de départ et le taux de croissance, nous allons pouvoir déterminer la croissance entre les deux dates. En ajoutant ensuite cette croissance à la valeur de départ, nous obtiendrons la valeur d’arrivée.

X2 = X1 + ΔX, donc

X2 = X1 + (Taux de croissance \* X1), ou encore

**X2 = X1 (1 + Taux de croissance)**

**Application n°7 :**

En 2009, le PNB japonais était de 5249,04 milliards de dollars. En 2010, après deux années de recul du PNB, le pays renoue avec la croissance, au taux de 4%.

Travail à faire : Calculez le PNB de l’année 2010.

**Solution :**

* Notons Tx de crce le taux de croissance. Il nous est donné, égal à 4% entre 2009 et 2010. Notons PNB2009 le PNB du Japon en 2009, que nous connaissons, et PNB2010 le PNB du Japon en 2010 que nous recherchons.
* Tx de crce = (PNB2010 - PNB2009) / PNB2009,
* Donc (PNB2010 - PNB2009) = Tx de crce \* PNB2009
* Soit PNB2010 = PNB2009 + (Tx de crce \* PNB2009)
* Ou encore PNB2010 = PNB2009 (1+ Tx de crce )
* PNB2010 = PNB2009 (1+0,04)
* PNB2010 = 5459 milliards de dollars

1. **Autres taux, comme valeurs relatives**

On a vu que Taux de croissance = ΔX / X, donc que le taux de croissance est la croissance rapportée à la valeur de départ (ou « relative à » ou « exprimée relativement à » la valeur de départ). Dans bien d’autres situations, on va le voir, on calcule de la même façon une valeur par rapport à une autre (ou relativement à une autre).

On calcule par exemple la TVA (Taxe sur la Valeur Ajoutée) par rapport à la valeur hors taxe d’un bien.

**Application n°8 :**

Soit un produit vendu 100 € hors taxes, et soit un taux de TVA de 20%.

Q1 : Quel est le montant de la TVA?

Q2 : Quel est le montant TTC (« Toutes Taxes Comprises ») payé par le client ? Rappelons que dans le vocabulaire fiscal, le prix TTC est le prix hors taxes plus la TVA.

**Solution :**

Q1 : Appelons PHT le prix hors taxes, TVA le montant de la TVA, et PTTC le prix TTC payé par le client.

* TVA = 20% \* 100 €, donc
* TVA = 20 €

Q2 : puisque dans le vocabulaire fiscal, le prix TTC est le prix hors taxes plus la TVA,

* PTTC = PHT + TVA
* PTTC = 100 € + 20 €
* PTTC = 120 €.

Le client paie 120 €, 100 € seront gardés par l’entreprise, c’est sont revenu. Les 20 € de TVA seront reversés par l’entreprise à l’Etat selon les modalités que l’on étudiera en cours de comptabilité.

**Application n°9 :**

Soit un produit vendu 85 € hors taxes, et soit un taux de TVA de 20%.

Q1 : Quel est le montant de la TVA?

Q2 : Quel est le montant TTC (« Toutes Taxes Comprises ») payé par le client ?

**Solution :**

Q1 : Appelons PHT le prix hors taxes, TVA le montant de la TVA, et PTTC le prix TTC payé par le client.

* TVA = 20% \* 85 €, donc
* TVA = 17 €

Q2 : puisque le prix TTC est le prix hors taxes plus la TVA,

* PTTC = PHT + TVA
* PTTC = 85 € + 17 €
* PTTC = 102 €.

Le client paie 102 €. 85 € seront gardés par l’entreprise, c’est sont revenu. Les 17 € de TVA seront reversés par l’entreprise à l’Etat selon les modalités que l’on étudiera en cours de comptabilité, comme indiqué précédemment.

**Application 10 : Trouver le hors taxes quand on connaît le TTC…**

Une veste se vend au prix de 100 € hors taxes. Le prix affiché est, comme toujours en France (mais pas dans certains pays étrangers, au Japon notamment) un prix TTC.

Q1 : Si le taux de TVA est de 20%, quel est le prix affiché ?

Un client remarque un petit défaut sur ce produit, et négocie 15% de réduction, réduction que le vendeur accepte de lui accorder.

Q2 : Quel prix le client paiera-t-il?

Q3 : Quel est le prix hors taxe de la vente ?

Q4 : Quel est le montant de la TVA ?

**Solution :**

**Q1 :**

Appelons PHT le prix hors taxes, TVA le montant de la TVA, et PTTC le prix TTC affiché,

* PTTC = PHT + TVA
* PTTC = 100 € + (20%\*100€)
* PTTC = 120 €.

Le prix affiché de cette veste sera de 120 €.

**Q2 :**

Le client obtient une réduction de 15% du prix affiché, soit :

* réduction = 15%\*120€
* réduction = 18 €
* Donc Prix payé = 120 € - 18 €
* Soit **Prix payé = 102€**.
* C’est bien entendu un prix TTC, puisqu’on l’a calculé à partir du prix initial affiché, qui était TTC.

**Q3 :**

Appelons TTC le prix payé TTC par le client, en l’occurrence 102 €, et appelons HT le prix hors taxes recherché,

* TTC = HT + (20%\*HT), puisque le taux de TVA, ici 20%, doit toujours s’appliquer à un montant hors taxes.
* Soit TTC = HT (1+ 20%)
* Ou encore, en divisant les deux côtés du signe = par (1 + 20%),
* HT = TTC / (1+20%)
* Soit HT = 102 € / (1,2)
* **HT = 85€**

**Attention ! Une erreur courante** dans ce genre de situation consiste à croire que la TVA sera de 20% du prix réduit, ici 20% de 102 €. C’est une grosse erreur, car c’est au prix hors taxes, et non au prix TTC, que doit s’appliquer le taux de TVA de 20%. Or 102 € est un prix TTC.

**Q4 :**

La TVA est la différence entre le montant TTC et le montant hors taxes. Elle est aussi égale à 20% du montant hors taxes. Nous avons donc deux méthodes pour calculer le montant de la TVA. Calculons selon la première méthode, et vérifions que nous trouvons bien le même montant avec la seconde (si nous ne trouvons pas le même montant, c’est qu’il y a une erreur quelque part – le professionnel prudent ne rate jamais une occasion de vérifier le résultat d’un calcul qu’il peut également réaliser par un autre moyen ! )

Donc, partant de la première proposition selon laquelle la TVA est la différence entre le montant TTC et le montant hors taxes, TVA = 102€ - 85 €

* TVA = 102€ - 85 €
* donc TVA = 17 €
* Vérification à partir de la seconde proposition, selon laquelle la TVA est égale à 20% du montant hors taxes:
* TVA = 20% \* 85 €.
* 20% \* 85 € = 17 € ? Oui, donc *a priori*, il n’y a pas d’erreur…

**Application 11 : Trouver le hors taxes quand on connaît le TTC, autre exemple…**

Un pantalon se vend au prix de 80 € hors taxes. Le prix affiché est un prix TTC.

Q1 : Si le taux de TVA est de 20%, quel est le prix affiché ?

C’est la période des soldes. Une réduction de 25% est appliquée à cet article.

Q2 : Quel est le prix soldé ?

Q3 : Quel est le prix hors taxe de la vente en solde ? Quel est le montant de la TVA ?

**Solution :**

**Q1 :**

Appelons PHT le prix hors taxes, TVA le montant de la TVA, et PTTC le prix TTC affiché,

* PTTC = PHT + TVA
* PTTC = 80 € + (20%\*80€)
* PTTC = 96 €.

**Q2 :**

* Réduction solde = 25%\*96€
* Réduction solde = 24 €
* Donc Prix soldé = 96€ - 24€
* Soit Prix soldé = 72€.

C’est bien entendu un prix TTC.

**Q3 :**

Appelons TTC le prix soldé TTC, HT le prix hors taxes recherché,

* TTC = HT + (20%\*HT)
* Soit TTC = HT (1+ 20%)
* Ou encore HT = TTC / (1+20%)
* Soit HT = 72 € / (1,2)
* HT = 60 €

Sachant que TTC = HT + TVA, nous déduisons TVA = TTC – HT

* Donc TVA = 12 €
* Vérification : Es-ce que 20% \* 60 € fait bien 12 € ?
* Oui, *a priori* pas d’erreur…

**Application 12 : Salaire, cotisations sociales et charges sociales**

Monsieur Dupont reçoit un **salaire brut** de 1250 € par mois. Sur ce salaire son employeur retient quelques 20% de **cotisations sociales (dites « part salariée »)**, qu’il reverse à divers organismes de Sécurité sociale (Assurance maladie, vieillesse, etc.). L’employeur verse le restant, appelé **salaire net**, à Monsieur Dupont

En outre l’employeur paie à divers organismes (les mêmes plus d’autres) quelques 38% de **charges sociales (dites « part patronale »)**. Salaire brut plus part patronale constituent le **coût salarial**.

* Q1 : dans ce cas, quel est le montant des cotisations sociales (part salariée)
* Q2 : quel est le salaire net de Monsieur Dupont ?
* Q3 Quel est le montant des charges sociales (part patronale) ?
* Q4 : Quel est le coût salarial attaché à Monsieur Dupont ?
* Q5 : Construire une représentation graphique simple

Solution :

**Q1**

* Cotisations sociales = 20% \* Salaire brut
* Cotisations sociales = 20% \* 1250 €
* Cotisations sociales = 250 €

**Q2 :**

* Salaire net = Salaire brut – Cotisations sociales
* Salaire net = 1250€ - 250 €
* Salaire net = 1000 €

**Q3 :**

* Charges sociales = 38% \* Salaire brut
* Charges sociales = 38% \* 1250 €
* Charges sociales = 475 €

**Q4 :**

* Coût salarial = Salaire brut + Charges sociales
* Coût salarial = 1250 € + 475 €
* Coût salarial = 1725 €

**Q5 :** **Représentation graphique**



**Section 4 : Equation et représentation d’une droite**

De nombreuses relations entre deux variables X et Y peuvent s’approximer par l’équation simple : Y = a X + b, a et b étant des constantes.

C’est l’équation d’une droite.

Exemple : Y = 3 X + 5.

Pour la représenter, il nous suffit de choisir deux valeurs différentes de X…

* Si X = 0, Y = 5
* Si X = 30, Y = 95



**Application 13 : Seuil de rentabilité, autre représentation graphique…**

Un magasin de jeans supporte chaque mois un montant de coûts fixes, c’est-à-dire de coûts dont le montant global ne dépend pas de la quantité vendue, de 15000 €. Exemples de coûts fixes : loyer du magasin, salaires des vendeurs salariés en CDI hors heures supplémentaires, perte de valeur des équipements (dotation aux amortissements), etc.

Q1 : chaque jean étant vendu 70 € alors qu’il est acheté 40€, combien faut il en vendre pour ne pas perdre d’argent dans le mois ?

Solution :

Pour ne plus perdre d’argent, il faut que chiffre d’affaires, c’est-à-dire montant des ventes, soit égal à l’ensemble des coûts (coûts fixes plus coût d’achat des jeans vendus).

* Soit q le nombre de jeans achetés et vendus,
* Pour ne plus perdre d’argent, il faut que q soit tel que :
* Ventes = Total des Coûts
* 70 € \* q = 15000€ + (40€ \* q)
* Ventes = 70 € \* q , est de la forme Y = ax +b, c’est donc l’équation d’une droite;
* Coûts = (40\*q) + 15000, est de la forme Y = ax +b, avec a 40 et b= 15000, c’est donc également l’équation d’une droite.

On peut, sans refaire le calcul, représenter la droite des ventes, celle des coûts, et voir où elles se coupent :

* Droite des ventes : Y = 70 q
* Droite des coûts : Y = 40q + 15000

Le seuil de rentabilité correspond à la quantité (à lire en abscisse, c'est-à-dire sur l’axe horizontal) correspondant au point d’intersection des deux droites (car en ce point, total des ventes égale total des coûts). On voit que le seuil de rentabilité est égal à 500 !

Q2 : Quel est le bénéfice à 800 jeans vendus dans le mois?

Solution : C’est sur le graphique, la différence entre le montant des ventes et le montant des coûts pour une quantité produite et vendue de 600. C’est donc la longueur du segment de droite en vert, sur le graphique ci-dessous, page suivante. On peut lire en Euro ce montant sur l’axe des ordonnées (axe vertical).

Q4 : Quelle est la perte si on en vend que 200 ?

Solution : C’est sur le graphique, la différence entre le montant des ventes et le montant des coûts pour une quantité produite et vendue de 200. C’est donc la longueur du segment de droite en rouge, sur le graphique ci-dessous, page suivante. On peut lire en Euro ce montant sur l’axe des ordonnées (axe vertical).



**… et par le calcul,**

**Q2 :** Quel est le bénéfice à 600 jeans vendus dans le mois ?

* Résultat = Chiffre d’affaires – Coûts
* Résultat = 70€\*q – [(40€\*q) + 15000€]
* Résultat = 70\*600 – [(40\*600) + 15000]
* Résultat = 42000€ – (39000€) = 3000€

**Q3 :** Quelle est la perte si on en vend que 350 ?

* Résultat = 70€\*q – [(40€\*q) + 15000€]
* Résultat = - 4500 €

**Remarques**

* Un résultat positif s’appelle un bénéfice
* Un résultat négatif s’appelle une perte
* Le terme ventes s’emploie tant pour désigner les quantités (600 jeans vendus par exemple) que la valeur vendue (42000 € dans ce cas)
* L’expression chiffre d’affaires désigne les ventes en valeur, 42000€ dans le cas où on vend 600 jeans

**Section 5 : élasticité de la demande**

On calcule souvent deux types différents d’élasticités de la demande :

* l’élasticité de la demande par rapport au prix, en marketing notamment,
* Et l’élasticité de la demande par rapport au revenu, en économie, mais aussi en marketing.

Développons ici la définition et le calcul de l’élasticité de la demande par rapport au prix. **Elle mesure la sensibilité de la demande en volume par rapport à une variation du prix,** C’est-à-dire l’importance de l’effet d’une variation de prix sur les quantités demandées.

Elle se calcule comme suit :

* ed/p = (Δd/d) / (Δp/p), c’est-à-dire
* ed/p = taux de croissance de la demande / taux de croissance du prix

Dès lors que ed/p = (Δd/d) / (Δp/p),

* alors, (Δd/d) = ed/p \* (Δp/p),

si bien que connaissant ed/p , on peut vraiment déduire quel (Δd/d) résulterait d’une variation donnée de prix de Δp/p.

* **Si ed/p = 0 par exemple,**
* cela veut dire que (Δd/d) = 0 quelque soit (Δp/p),
* soit que Δd = 0, donc le prix n’a aucune influence sur les quantités vendues !
* **Si ed/p = -1,**
* Cela veut dire que (Δd/d) = - (Δp/p),

soit que par exemple 2% d’augmentation de prix provoque 2% de baisse de la demande.

**Application 14 : le cas Eaux Vives**

Le producteur d’eau minérale *Eaux Vives* écoule la totalité de sa production dans le sud-ouest de la France. Jusqu’au samedi 23 novembre, son prix de vente TTC est de 1€, la quantité vendue étant alors d’un million de bouteilles par semaine. Une promotion est lancée à partir du lundi 25 novembre, au prix TTC de 0,90€ ; les ventes augmentent alors, et sont de 1,2 million de bouteilles par semaine.

Définir puis calculer l’élasticité de la demande par rapport au prix pour ce produit, en justifiant votre calcul.

Solution :

* Δd = 1,2 million – 1 million de bouteilles
* Δd = 0,2 millions de bouteilles
* Δd/d = 0,2/1 = 0,2
* Δp = 0,90 € - 1 €
* Δp = - 0,10 €
* Δp/p = - 0,10/1
* ed/p = (Δd/d) / (Δp/p),
* ed/p = (0,2) / (-0,1)
* ed/p = -2

Cela signifie que si les prix augmentent de x% (2% par exemple), alors la demande en quantité baissera de 4%.

**Application 15 : Yaourts YOGO.**

Durant la première semaine de janvier, les yaourts YOGO sont en promotion à 2 € les douze ; 1400 tonnes ont été vendues.

La seconde semaine, la promotion s’achève, le prix revient à 2,80 € les douze ; les ventes tombent à 780 tonnes.

**Q :** *« toutes choses étant égales par ailleurs »,* quelle est l’élasticité de la demande par rapport au prix ? Justifiez bien vos calculs…

Solution :

Calculons tout d’abord le taux de variation (ou taux de croissance) de la demande, Δd/d,

* Δd = 780 t – 1400 t
* Δd = - 620 t
* Δd/d = -620/1400
* Δd/d = -0,4429=-44,29/100= -44,29%

Calculons ensuite le taux de variation du prix, Δp/p

* Δp = 2,80€-2€
* Δp = 0,80 €
* Δp/p = 0,80/2 = 0,40 = 40%

Nous pouvons enfin calculer l’élasticité de la demande par rapport au prix, ed/p

* ed/p = (Δd/d) / (Δp/p),
* ed/p = (-44,29/100) / (40/100) = -1,1

**Section 6 : évolution d’une variable, *l’indice élémentaire***

Soit une variable X quelconque, par exemple le prix de la baguette de pain de campagne biologique sur un marché donné au 30 juin de l’année considérée…

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Année** | **2000** | **2001** | **2002** | **2003** | **2004** | **2005** |
| **X** | **1,20€** | **1,26€** | **1,30€** | **1,30€** | **1,32€** | **1,33€** |

**Q** : Calculez le taux de croissance de cette variable d’une année sur l’autre.

Solution :

* Le taux de croissance se calcule par le rapport ΔX / X, X étant la valeur de départ.
* Par exemple, en 2002 par rapport à 2001,
  + ΔX / X = (1,30 – 1,26) / 1,26
  + ΔX / X = 0,04 / 1,26
  + ΔX / X = 0,0317 = 3,17%

Ce qui donne au total :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Année** | **2000** | **2001** | **2002** | **2003** | **2004** | **2005** |
| **X** | **1,20€** | **1,26€** | **1,30€** | **1,30€** | **1,32€** | **1,33€** |
| **ΔX / X** | **-** | **5%** | **3,17%** | **0%** | **1,54%** | **0,76%** |

1. **Indice élémentaire, définition**

On appelle **Indice élémentaire de la variable X en base 100 pour l’année 2000** le rapport

* Ii/2000 = Xi/X2000 pour chaque année i, exprimé en pourcentage.

Exemple, pour l’année 2002,

* I2002/2000 = X2002/X2000
* I2002/2000 = 1,30 / 1,20 = 1,0833 = 108,33%
* On écrira I2002/2000 = 108,33

Ce qui donne le tableau suivant :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Année** | **2000** | **2001** | **2002** | **2003** | **2004** | **2005** |
| **X** | **1,20€** | **1,26€** | **1,30€** | **1,30€** | **1,32€** | **1,33€** |
| **Ii/2000** | **100** | **105** | **108,33** | **108,33** | **110** | **110,83** |

1. **Premier intérêt des indices, comparer aisément l’évolution de deux variables**

En ramenant à 100 chaque variable à l’année de départ, ici 2000, on les compare plus aisément.

Exemple : soit X, le prix de la baguette de pain de campagne, et Y le prix du fromage de chèvre (80 gr). Il n’est pas facile de comparer sur le tableau suivant :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Année** | **2000** | **2001** | **2002** | **2003** | **2004** | **2005** |
| **X** | **1,20€** | **1,26€** | **1,30€** | **1,30€** | **1,32€** | **1,33€** |
| **Y** | **2,10€** | **2,16€** | **2,18€** | **2,25€** | **2,30€** | **2,30€** |

Mais c’est très facile sur le tableau d’indices, base 100 en 2000 :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Année** | **2000** | **2001** | **2002** | **2003** | **2004** | **2005** |
| **X** | **1,20€** | **1,26€** | **1,30€** | **1,30€** | **1,32€** | **1,33€** |
| **Y** | **2,10€** | **2,16€** | **2,18€** | **2,25€** | **2,30€** | **2,30€** |
| **X: Ii/2000** | **100** | **105** | **108,33** | **108,33** | **110** | **110,83** |
| **Y: Ii/2000** | **100** | **102,86** | **103,81** | **107,14** | **109,52** | **109,52** |

1. **Deuxième intérêt des indices : taux de croissance de l’indice égal à celui de la variable.**

On le voit bien à partir du tableau du prix du pain de campagne :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Année** | **2000** | **2001** | **2002** | **2003** | **2004** | **2005** |
| **X** | **1,20€** | **1,26€** | **1,30€** | **1,30€** | **1,32€** | **1,33€** |
| **ΔX / X** | **-** | **5%** | **3,17%** | **0%** | **1,54%** | **0,76%** |
| **Ii/2000** | **100** | **105** | **108,33** | **108,33** | **110** | **110,83** |
| **ΔI /I** | **-** | **5%** | **3,17%** | **0%** | **1,54%** | **0,76%** |

Ce n’est pas surprenant, car pour deux années successives quelconques, n-1 et n :

**[(Xn/X2000) – (Xn-1/X2000)]**

**ΔI /I = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

**[Xn-1/X2000)]**

**soit [(Xn - Xn-1)/X2000)**

**ΔI /I = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

**(Xn-1/X2000)]**

**soit [(Xn - Xn-1)]**

**ΔI /I = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

**(Xn-1)**

***Donc (*ΔI /I )= (ΔX /X)**

**Application 16 : Evolution de la production industrielle en France, en RFA (République Fédérale d’Allemagne) et au Japon**

Comparons à partir du tableau suivant l’évolution de la production industrielle de la France, de la RFA et du Japon :



Travail à faire :

* Q1 - Représentez graphiquement ces évolutions.
* Q2 - Peut-on dire que la production industrielle de l’Allemagne est supérieure à celle du Japon en 2007 ?
* Q3 - Calculez le taux de croissance de la production industrielle de chacun des trois pays en 2010 par rapport à 2009. Interprétation ?

Solution

* Q1 - Représentation graphique



Remarque : cette représentation graphique est juste, mais elle n’est pas très judicieuse, car tout le bas du graphique est vide, et on ne dispose que d’un tiers du graphique pour « voir » le phénomène étudié. Il serait bien plus judicieux de graduer l’axe des ordonnées de 80 à 120 seulement, tout en utilisant la même hauteur de graphique, ce qui permettrait de bien mieux voir les évolutions des trois courbes. Cela donnerait :



C’est bien le même phénomène qui est étudié dans les deux graphiques, mais le second est beaucoup plus lisible. C’est comme si on utilisait une meilleure loupe, plus adaptée. Pensez donc à bien choisir la graduation de vos axes, afin de mieux montrer le phénomène que vous devez représenter.

* Q2 :

Non, on ne peut absolument pas dire que la production industrielle de l’Allemagne est supérieure à celle du Japon en 2007. Le Japon est en effet bien plus peuplé que l’Allemagne, quelques 128 millions d’habitants en 2007 pour le premier contre 82 millions pour la seconde. Et l’on sait que la production industrielle du Japon est bien supérieure à celle de l’Allemagne en 2007 (comme aujourd’hui d’ailleurs)..

On peut simplement dire au vu de ce tableau et de ce graphique **que la production industrielle a progressé plus vite en Allemagne qu’au Japon entre 2005 et 2007**.

* Q3 :

Les taux de croissance entre 2009 et 2010 sont respectivement de 5,40% pour la France, 10,03% pour l’Allemagne, et 16,03% pour le Japon. Ces taux peuvent sembler élevés, mais c’était le rebond suite à l’effondrement de l’année précédente, comme on le voir sur le graphique.

**Chapitre 2 : Introduction aux statistiques**

Le mot statistique (*statistics* en anglais) vient du mot *state*, Etat en anglais. Il s’agissait au départ des données chiffrées que rassemblaient les Etats pour mieux connaître la population et la richesse du pays, donc sa puissance potentielle, tant en nombre de personnes que l’on pouvait enrôler dans les armées qu’en termes d’impôts que l’on pouvait espérer prélever…

De nos jours, on emploie le terme « statistiques » pour désigner tout ensemble de données numériques nombreuses, mais aussi l’ensemble des méthodes qui permettent de les traiter, c'est-à-dire de les résumer et de les analyser. Pour résumer des données statistiques nombreuses, on utilise d’une part des indicateurs de tendance centrale (section 1), d’autre part des indicateurs de dispersion (section 2). Les méthodes d’analyse des données statistiques seront présentées dans d’autres enseignements.

**Section 1 : les indicateurs de tendance centrale**

Nous allons étudier ici les trois indicateurs de tendance centrale les plus souvent utilisés, à savoir la moyenne simple, la médiane et la moyenne pondérée.

1. **La moyenne simple**

Vous savez la calculer, et vous comprenez bien sa signification. Une moyenne de notes revient à faire un calcul compensant les notes les plus faibles par les notes les plus fortes, pour nous dire à peu près quel est le niveau de performance de l’élève.

Soit n notes, X1, X2, X3, … , Xn, la moyenne de ces notes, que nous allons noter par exemple M(X), se calcule comme suit :

**M(X) = (X1 + X2 + X3 + …+ Xn)/n**

Cela peut s’écrire également :

**M(X) = (X1/n) + X2/n) + (X3/n) + …+ (Xn/n)**

ce qui revient à diviser chaque note par le nombre de notes n, c'est-à-dire donner à chaque note un poids de 1/n dans le calcul de ma moyenne. Les notes ont ainsi dans le calcul de la moyenne simple toutes le même poids, c'est-à-dire la même importance, soit 1/n. Les notes les plus faibles seront compensées par les notes les plus fortes, et nous aurons ainsi une idée du niveau de performance de l’élève dans la matière considérée.

**Application 17 : calcul d’une moyenne simple**

Calculez les moyennes de Jacques et Pierre, en mathématiques, aux six devoirs du premier semestre. Jacques a eu les notes suivantes : 10, 12, 10, 10, 12, et 12 ; Pierre a eu les notes suivantes : 16, 8, 8, 8, 16, et 10.

**Solution :**

* + Moyenne de Jacques : 11,

car (10+12+10+10+12+12)/6 = 66/6 = 11 ;

* + Moyenne de Pierre : 11 également.

Remarque :

Jacques et Pierre ont eu la même moyenne. La moyenne résume l’information de manière remarquable.

Mais en résumant l’information, on en perd un peu tout de même ! On perd ici l’information selon laquelle Jacques a des résultats beaucoup plus réguliers que ceux de Pierre. En d’autres termes, les résultats de Pierre sont plus dispersés autour de la moyenne que ceux de Jacques.

On calculera donc en complément de la moyenne un indicateur de dispersion (l’écart type par exemple), pour perdre moins d’information. Cf. section 2) ci-dessous, indicateurs de dispersion)

1. **La médiane**

**Application 18 : moyenne et médiane…**

Dans deux immeubles voisins, vivent 14 familles, 7 dans le premier, 7 dans le second. Un sociologue veut comparer les niveaux de vie des familles des deux immeubles. Il a rassemblé les informations suivantes :



**Q1 :** Sans faire de calcul particulier, dire dans lequel de ces deux immeubles le niveau de vie est le plus bas ? Expliquer pourquoi en une ou deux phrases bien rédigées…

**Solution :** Il semblerait que ce soit l’immeuble 1, car la plupart des familles y ont des revenus inférieurs à celles de l’immeuble 2.

**Q2 :** Calculer la moyenne des revenus dans les deux immeubles. Commentaires ?

**Solution :**

* + Immeuble 1, Moyenne = 1490,00 €
  + Immeuble 2, Moyenne = 1107,14 €

Commentaire : le calcul de moyenne ne confirme pas notre impression telle que formulée en réponse à la question 1. **C’est parce que le calcul de moyenne est très sensible aux valeurs extrêmes**, ici au revenu élevé de la famille 7, de 4000€. Les statisticiens ont donc inventé un autre indicateur de tendance centrale, moins sensible aux valeurs extrêmes (c’est à dire extrêmement fortes ou extrêmement faibles par rapport aux autres), que l’on appelle la médiane.

**On appelle médiane la modalité de la variable qui départage la population en deux sous ensembles d’effectifs égaux : la moitié qui a des modalités inférieures ou égales à cette valeur, et la moitié qui a des modalités supérieures.**

Pour déterminer la médiane, nous devons classer les individus (ici les familles) par revenu croissant, puis déterminer la valeur qui départage la population des familles en deux sous-ensembles d’effectifs égaux.

Le tableau devient ainsi :



Soit :

* + Immeuble 1, Médiane = 1200 €
  + Immeuble 2, Médiane = 1100 €

Les niveaux de revenus se regroupent au tour de 1200€ dans l’Immeuble 1, et de 1100 € dans l’immeuble 2. La différence est faible.

La médiane est ainsi un autre indicateur de tendance centrale, moins sensible aux valeurs extrêmes que la moyenne. L’un n’est pas mieux que l’autre, les deux indicateurs se complètent. On calcule d’ailleurs souvent les deux, pour avoir deux éclairages complémentaires.

1. **Moyenne pondérée**

La moyenne pondérée se fait dans la même logique que la moyenne simple, mais en ne donnant pas le même poids à chaque valeur de la variable. Par exemple, dans un calcul de moyennes de notes, certaines notes ont plus de poids que d’autres, par exemple parce qu’elles correspondent à des épreuves plus longues (voir application 19 ci-dessous).

Soit n notes, X1, X2, X3, … , Xn, la moyenne de ces notes, pondérées par les coefficients p1, p2, pn, se calcule comme suit :

**M(X) = p1 (X1) + p2 (X2) + p3 (X3) + …+ pn (Xn)**

Lorsque toutes les notes ont le même poids, c’est le calcul de la moyenne simple, et dans ce cas p1= p2= p3 = … = pn = 1/n. On comprend bien que la somme des tous les coefficients est égale à n/n, c’’st à dire 1.

Lorsque les notes n’ont le même poids, les coefficients (ou poids) diffèrent, mais leur somme est bien sûr toujours égale à 1, puisque ce que nous appelons le poids, c’est la part de la note dans le calcul de la moyenne.

**Application 19 : calcul de moyenne pondérée.**

Dans une classe, trois notes ont été obtenues en contrôle continu en mathématiques au semestre 1. La première est relative à une épreuve en 1 heure, la seconde à une épreuve en 3 heures, la troisième à une épreuve en 2 heures.

Guilhem a eu 12 à la première épreuve, 14 à la seconde, 15 à la troisième.

Le professeur avait annoncé en début de semestre que les notes seraient « pondérées » par la durée de chaque épreuve, c’est-à-dire que chacune aurait un poids en fonction de sa durée.

**Q1 :** calculer les coefficients de pondération, c'est-à-dire le poids de chacune des ces trois épreuves dans le calcul de la moyenne.

**Q2 :** calculez la moyenne de Guilhem.

**Solution :**

**Q1 :**

* Poids p1 de la première épreuve ?
* p1 = 1 h / (1h + 3h + 2h)
* p1 = 1/6
* Poids p2 de la seconde épreuve ?
* p2 = 3 h / (1h + 3h + 2h)
* p2 = 3/6
* Poids p3 de la troisième épreuve ?
* p3 = 2/6

**Q2**

Il s’agit de la moyenne pondérée des notes par les coefficients calculés ci-dessus, en réponse à Q1.

* M = [(1/6) x 12] + [(3/6) x 14] + [(2/6) x 15]
* M = 2 + 7 + 5
* M = 14
* Guilhem a obtenu une moyenne de 14 !

**Application 20 : autre calcul de moyenne pondérée.**

Dans une université européenne, le contrôle continu compte pour 30%, et l’examen final pour 70%. En mathématiques, Mohamed a eu 14 sur 20 au contrôle continu, et 12 sur 20 à l’examen final. Paul a eu dans cette matière 15 sur 20 au contrôle continu, mais 10 seulement à l’examen final.

* **Q1 :** Quelles sont leurs moyennes en mathématiques ?

**Solution :**

Appelons Moy Mohamed la moyenne de Mohamed et Moy Paul celle de Paul.

* Moy Mohamed = (30% x 14) + (70% x 12)
* Moy Mohamed = 4,2 + 8,4
* Moy Mohamed = 12,6
* Moy Paul = (30% x 15) + (70% x 10)
* Moy Paul = 4,5 + 7
* Moy Paul = 11,5

**Section 2 : les indicateurs de dispersion**

1. **La variance…**

Reprenons un de nos exemples antérieurs… Aux six devoirs du premier semestre en mathématiques, Jacques a eu les notes suivantes : 10, 12, 10, 10, 12, et 12 ; Pierre a eu les notes suivantes : 16, 8, 8, 8, 16, et 10

**Q1 :** recalculez leur moyenne.

**Solution :**

* + Moyenne de Jacques : 11
  + Moyenne de Pierre : 11 également.

Comme nous l’avions déjà remarqué, tous deux ont eu la même moyenne de 11, mais nous voyons bien que les résultats de Pierre sont plus dispersés autour de la moyenne que ceux de Jacques.

**Q2 :** Faire une représentation graphique sur deux axes parallèles horizontaux gradués de 0 à 20…

**Solution :** chaque \* représentera une note sur ce graphique :

\*\*\* **M(J) \*\*\***

Jacques

8 9 10 11 12 13 14 15 16

\*\*\* \* **M(P)** \*\*

Pierre

8 9 10 11 12 13 14 15 16

La dispersion peut se mesurer comme la somme des distances de chaque note à la moyenne, ou mieux encore comme **la moyenne de ces distances.** Mais comment mesurer ces distances ?

On ne peut pas prendre distance = note – moyenne, car les distances seraient négatives pour les notes inférieures à la moyenne, et compenseraient les distances positives pour les autres notes, si bien que la somme serait nulle !

On le voit sur le tableau suivant :



Ce qui n’est pas surprenant car :

* Somme de (note – moyenne) = (10-11) + (12-11) + (10-11) + (10-11) + (12-11) + (12-11)
* Soit
* Somme de (note – moyenne) = (10+12+10+10+12+12) – (6\*11)
* Soit
* Somme de (note – moyenne) = 6\*moyenne – 6\*11
* Somme de (note – moyenne) = (6\*11)- (6\*11) = 0

On va donc prendre comme distance **le** **carré de la différence entre la note et la moyenne**, qui sera toujours positif.

* Distance = (note – moyenne)2
* La distance s’appelle aussi « écart » dans ce type de calcul. Donc :
* Ecart = (note – moyenne)2



Ainsi :

* Moyenne des distances pour Jacques = (1/6)\*6
* Soit
* Moyenne des distances pour Jacques = 1
* La moyenne des distances ainsi calculées s’appelle la variance.
* Variance = 1
* La variance est donc **la moyenne des écarts à la moyenne**

**Q3 :** Calculez de la même façon la moyenne des distances (« des écarts à la moyenne ») pour Pierre

**Solution :**



* Moyenne des distances pour Pierre = (1/6)\*78
* Moyenne des distances pour Pierre = 13
* Variance pour Pierre = 13.

La variance pour Pierre est très supérieure à celle pour Jacques, ce qui résulte du fait que la dispersion des notes autour de la moyenne est plus forte pour Pierre que pour Jacques.

**Application 21 : calcul de variance**

On compare la taille des enfants de l’école d’un village à la date de leur 10ème anniversaire en 1960 et en 1990, donnée en centimètres.

* 1960 : 120; 130; 110; 112; 116; 112
* 1990 : 110; 130; 140; 122; 120

**Q1 :** Calculez la moyenne des tailles de ces enfants pour ces deux années.

**Q2 :** Calculez la variance des tailles de ces enfants pour ces deux années. On aurait aussi pu dire « Calculez la dispersion des tailles de ces enfants pour ces deux années ».

**Solution**

**Q1 :**

* Moyenne = (somme des tailles) / nombre d’enfants
* Moyenne en 1960 = 116,67 cm
* Moyenne en 1990 = 124,40 cm

**Q2 :**

* Variance = moyenne des écarts à la moyenne
* si pour chaque enfant : écart = (taille – taille moyenne) 2.
* On peut pour faire les calculs construire le tableau ci-dessous :



* En 1960, variance = 46,22 cm2
* En 1990, variance = 101,44 cm2

La taille des enfants est en moyenne plus élevée en 1990 qu’en 1960, mais la dispersion des tailles était alors, en 1960, un peu plus faible.

1. **Variance et écart-type**

Si la variable est en cm, la moyenne est bien sûr en cm, mais la variance est en cm2.

Ce n’est pas en soi-même un problème…

Mais parfois, pour que la dispersion soit aussi mesurée en cm (ou plus largement dans la même unité que la variable), on calcule **l’indicateur « écart-type », qui est la racine carrée de la variance**.

Rappel sur la racine carrée :

* b est la racine carrée de a si b\*b = a, ce qui s’écrit aussi b2 = a.
* Autrement dit, la racine carrée de a est la valeur b telle que b2 = a.
* Remarque : quelle est la racine carrée de 4 ?
* Dans l’ensemble des nombres réels, il y a deux solutions : 2, et (-2),
* Car 2\*2 = 4, mais (-2)\*(-2) ) = 4 aussi !

On prendra pour **écart type la racine carrée positive de la variance**, puisque ce que nous voulons, c’est une distance…

Dans le cas où les notes n’ont pas le même poids (moyenne pondérée), la logique est la même, comme le suggère l’application 22 ci-dessous.

**Application 22 : calcul de dispersion lorsque les poids de chaque valeur diffèrent…**

Dans une classe, quatre notes ont été obtenues en contrôle continu en physique au semestre 1, pondérées par la durée de chaque épreuve.

La première et la seconde ont été obtenues sur une épreuve en 1 heure, la troisième sur une épreuve en 3 heures, la quatrième sur une épreuve en 2 heures.

Guilhem a eu 12 à la première épreuve, 14 à la seconde, 15 à la troisième, 14 à la quatrième.

Mohamed a eu 12 à la première épreuve, 16 à la seconde, 15 à la troisième, 16 à la dernière.

**Travail à faire :** Comparez les résultats de ces deux élèves.

**Solution :**

On voit tout d’abord que Mohamed a eu de meilleurs résultats que Guilhem, puisqu’à chaque épreuve la note de Mohamed est supérieure ou égale à celle de Guilhem.

Calculons pour aller plus loin la moyenne et la variance des notes pour chacun de ces deux élèves.

1. Calcul des moyennes :

Moyenne Guilhem = [(1/7)\*12] + [(1/7)\*14] + [(3/7)\*15] + [(2/7)\*14]

Moyenne Guilhem = (1/7)\*[12 + 14 + (3\*15) + (2\*14)]

Moyenne Guilhem = 99/7 = 14,14

Moyenne Mohamed = [(1/7)\*12] + [(1/7)\*16] + [(3/7)\*15] + [(2/7)\*16]

Moyenne Mohamed = (1/7)\*[12 + 16 + (3\*15) + (2\*16)]

Moyenne Mohamed = 105/7 = 15

1. Lequel des deux est-il le plus régulier ?

Pour le savoir, calculons la variance des notes pour chacun d’eux.

Variance Guilhem = [(1/7)\*(12-14,14)2] + [(1/7)\*(14-14,14)2] + [(3/7)\*(15-14,14)2] + [(2/7)\*(14-14,14)2]

Variance Guilhem = [(1/7)\*(4,58)] + [(1/7)\*(0,02)] + [(3/7)\*(0,74)] + [(2/7)\*(0,02)]

Variance Guilhem = [(1/7)]\*[4,58 + 0,02 + (3\*0,74) + (2\*0,02)]

Variance Guilhem =(6,86)/7 = 0,98.

Ecart type Guilhem = 0,99.

Et pour Mohamed,

Variance Mohamed = [(1/7)\*(12-15)2] + [(1/7)\*(16-15)2] + [(3/7)\*(15-15)2] + [(2/7)\*(16-15)2]

Variance Mohamed = [(1/7)\*(9)] + [(1/7)\*(1)] + [(3/7)\*(0)] + [(2/7)\*(1)]

Variance Mohamed = [(1/7)]\*[9 + 1 + (3\*0) + (2\*1)]

Variance Mohamed =(12)/7 = 1,71.

(soit Ecart type = 1,31)

Conclusion : Mohamed a de meilleures notes que Guilhem, mais plus dispersées par rapport à la moyenne.

On aurait pu aussi présenter ces calculs comme suit :



Les deux présentations sont tout à fait équivalentes.

**Conclusion du cours**

**de Méthodes Quantitatives Elémentaires pour les Sciences Sociales (MQESS)**

A l’issue de cet enseignement, vous avez révisé des notions fondamentales ou ré-appris à utiliser des outils mathématiques et statistiques de base, d’usage quotidien dans les métiers auxquels peut vous conduire votre licence.

Mais relisez attentivement l’introduction de ce cours. Seule la pratique vous permettra d’acquérir la maîtrise de ces outils. Ne vous contentez donc pas de relire les corrigés des applications proposées dans ce cours, refaites-les ! Comme le dit l’adage, « c’est en forgeant que l’on devient forgeron » ! Cela vaut pour toutes les disciplines techniques, et même pour les autres…

Nous vous proposons sur le site, en ligne sur la plateforme *e-learn*, divers exercices pour vous entraîner.